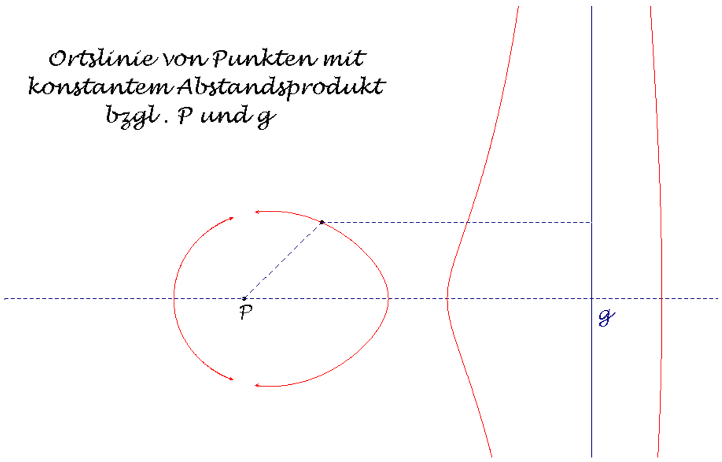
Ein konstantes Abstandsprodukt

Eckart Schmidt

Zu zwei fest vorgegebenen Punkten sind die Ortslinien für Punkte mit konstanten Abstandssummen, Abstandsdifferenzen oder Abstandsverhältnissen Kegelschnitte; zu konstanten Abstandsprodukten ergeben sich Cassinische Kurven mit dem Sonderfall der Lemniskaten. Betrachtet man die Abstände zu vorgegebenem Punkt und vorgegebener Geraden, so erhält man in den ersten drei Fällen wieder Kegelschnitte, zu konstantem Abstandsprodukt aber einen anderen Kurventyp, der hier näher untersucht wird. - Diese Ausarbeitung ist eine Ergänzung zu einer Jahresarbeit, eingereicht von Herrn Jürgen Kühl zum Abitur Ostern 1950.

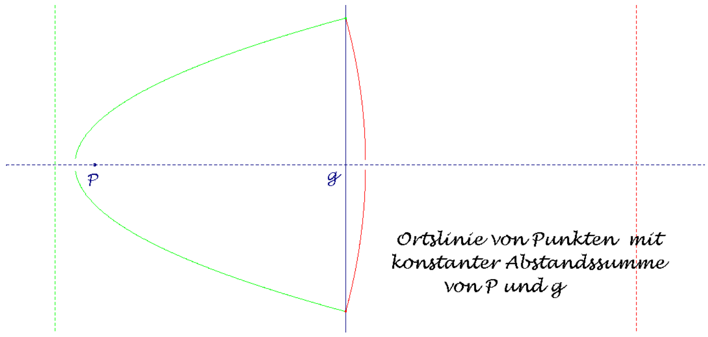


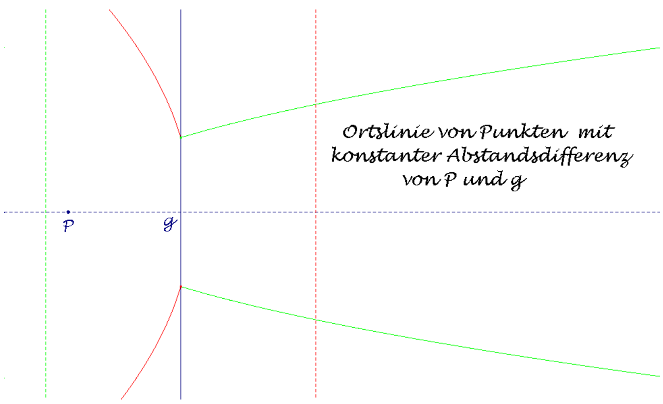
Vorbemerkungen

Die einleitend angesprochenen Zusammenhänge sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Abstände	Punkt-Punkt	Punkt-Gerade
konst. Summe	Ellipsen	Parabeln
konst. Differenz	Hyperbeln	Parabeln
konst. Produkt	Cassini-Kurven	???
konst. Quotient	Kreise	Kegelschnitte

- Punkte, deren Abstandssumme bzw. Differenz bzgl. zweier fester Punkte konstant ist, liegen bekanntlich auf einer Ellipse bzw. Hyperbel. Die vorgegebenen Punkte sind die Brennpunkte und die halbe Abstandssumme bzw. -differenz ergibt die große Halbachse.
- Punkte, deren Abstandsverhältnis bzgl. zweier fester Punkte konstant ist, liegen auf einem Kreis, dem Apollonius-Kreis der Dreiecke über der Verbindungsstrecke mit dem entsprechenden Seitenverhältnis.
- Punkte, deren Abstandssumme bzgl. eines vorgegebenen Punktes und einer vorgegebenen Geraden konstant ist, liegen auf zwei Parabelsegmenten. Brennpunkt der beiden Parabeln ist der vorgegebene Punkt; Leitlinien sind die Parallelen zu der vorgegebenen Geraden im Abstand der Abstandssumme. Dies ist darin begründet, dass Parabelpunkte vom Brennpunkt und von der Leitlinie den gleichen Abstand haben.

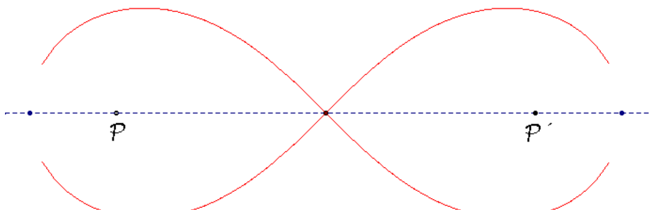


- Punkte, deren Abstandsdifferenz bzgl. eines vorgegebenen Punktes und einer vorgegebenen Geraden konstant ist, liegen auf einer Parabel oder zwei Parabelsegmenten, je nachdem die Abstandsdifferenz kleiner gleich oder größer als der Abstand des vorgegebenen Punktes von der Geraden ist. Brennpunkt ist wieder der vorgegebene Punkt, Leitlinien sind die Parallelen zur vorgegebenen Geraden im Abstand der Abstandsdifferenz.
- 

- Punkte, deren Abstandsverhältnis bzgl. eines vorgegebenen Punktes und einer vorgegebenen Geraden konstant ist, liegen auf einem Kegelschnitt. Ist das Abstandsverhältnis <1, 1 oder >1, so erhält man eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel. In jedem Fall ist der vorgegebene Punkt Brennpunkt und die vorgegebene Gerade Leitlinie (Polare des Brennpunktes) ([1], S149).

Cassini-Kurven

Zu zwei festen Punkten im Abstand *2p* ist die Ortslinie der Punkte mit einem Abstandsprodukt p^2 bekanntlich eine Lemniskate.



Lemniskate

Legt man den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in den Mittelpunkt der beiden vorgegebenen Punkte, so erhält man die Gleichung ([2], S.77)

$$(x^2+y^2)^2 = 2p^2(x^2-y^2),$$

bzw. in Polarkoordinaten

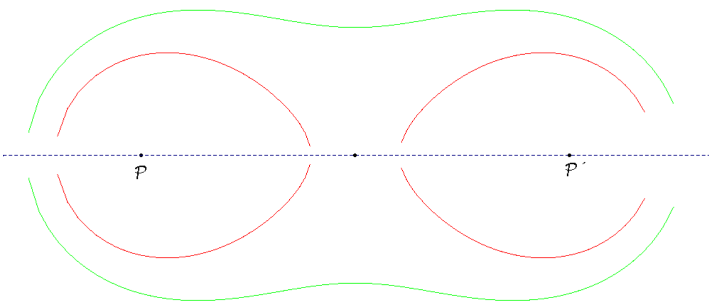
$$r^2 = 2p^2\cos(2\varphi).$$

Wählt man ein konstantes Abstandsprodukt $q^2 \neq p^2$, so erhält man die Gleichung ([2], S.89)

$$(x^2+y^2)^2 - 2p^2(x^2-y^2) = q^4 - p^4$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$r^4 - 2p^2r^2\cos(2\varphi) = q^4 - p^4.$$

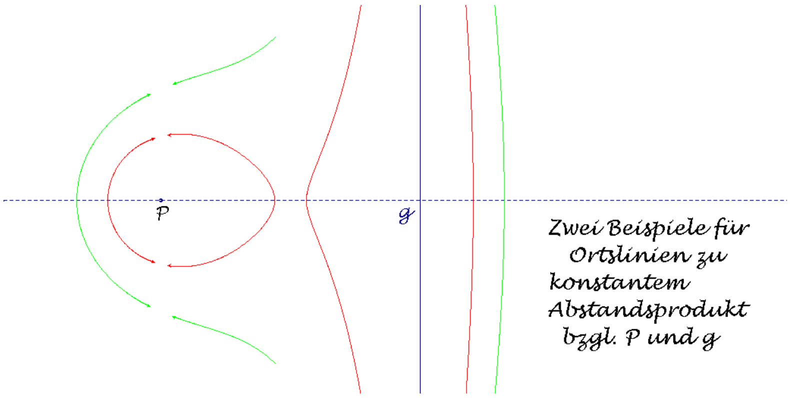


Zwei Beispiele von Cassini-Kurven

Für $q < p$ erhält man zwei symmetrische Ovale, für $p < q < p\sqrt{2}$ ergibt sich eine geschlossene Kurve mit Sattel, der für $q \geq p\sqrt{2}$ verschwindet. Für weitere Eigenschaften dieser Cassini-Kurven sei auf die zitierte Literatur verwiesen. Erwähnt sei noch, dass die Cassini-Kurven, sofern es sich um die beiden Ovale handelt, anallagmatische Kurven sind.

Konstantes Abstandsprodukt bzgl. Punkt und Gerade

Fest vorgegeben sei jetzt ein Punkt P im Abstand p von einer Geraden g und ein konstantes Abstandsprodukt q^2.



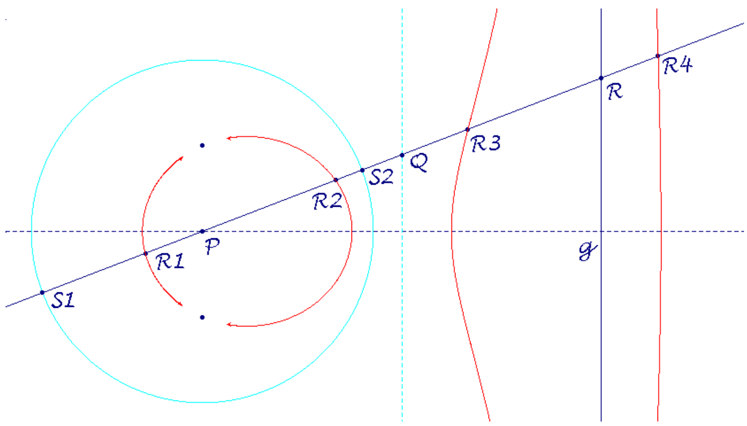
Arbeitet man in Polarkoordinaten bzgl. P und der zugehörigen Senkrechten zu g, so lässt sich die Gleichung der Kurve unmittelbar in der folgenden Form angeben:

$$r\left|p - r\cos\varphi\right| = q^2 .$$

Damit können auf einer Geraden durch P zwei bis vier Punkte liegen. Beschränkt man sich auf Argumente $-\pi \le \varphi \le \pi$ unter Zulassung negativer Radien, so können diese wie folgt angegeben werden:

$$r_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q^2\cos\varphi}}{2\cos\varphi}, \quad r_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q^2\cos\varphi}}{2\cos\varphi}$$

$$r_3 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q^2\cos\varphi}}{2\cos\varphi}, \quad r_4 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q^2\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$



Von den zugehörigen Punkten existieren R_1 und R_4 immer. R_1 und R_4 bzw. R_2 und R_3 liegen symmetrisch zu einem Punkt

$$Q\left(\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\tan\varphi\right)$$

im Schnitt der Trägergeraden mit einer Parallelen zu g im halben Abstand zu P. Diese Parallele sei als Mittelparallele angesprochen.

Die Punkte R_1 und R_2 lassen sich dann wie folgt konstruieren: Zeichnet man um P einen Hilfskreis mit dem Radius $\frac{2q^2}{p}$, der die Verbindungsgerade PQ in den Punkten S_1 und S_2 schneidet, so erhält man die konstruierbaren geometrischen Mittelwerte:

$$QR_1 = \sqrt{QP \cdot QS_1} = \frac{p\cos(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{2}\cos\varphi} \quad und \quad QR_2 = \sqrt{QP \cdot QS_2} = \frac{p\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{2}\cos\varphi}$$

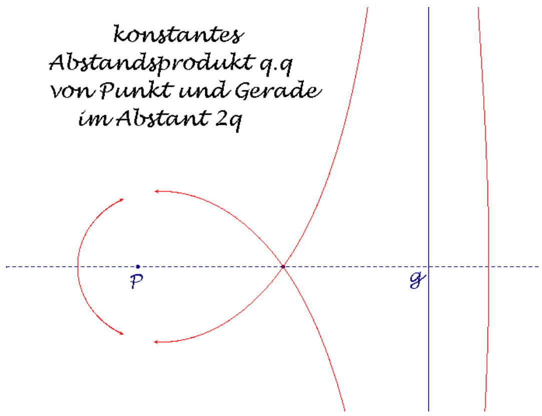
$$\text{mit} \quad \frac{QR_2}{QR_1} = \tan(\frac{\varphi}{2}) .$$

Damit sind die Strecken $QR_1 = QR_4$ und $QR_2 = QR_3$ die Radien von Inversionskreisen um den Punkt Q (siehe auch unten), die den Punkt P in die Schnittpunkte der Trägergeraden mit dem Hilfskreis überführen. Bezeichnet man den Schnitt der Geraden g und der Trägergeraden mit R, so gilt:

$$\overrightarrow{PR_1} = \overrightarrow{R_4R}, \quad \overrightarrow{PR_2} = \overrightarrow{R_3R}, \quad \overrightarrow{PR_3} = \overrightarrow{R_2R}, \quad \overrightarrow{PR_4} = \overrightarrow{R_1R}.$$

Der Spezialfall

Eine spezielle Kurve erhält man für Punkte mit dem Abstandsprodukt $q^2 = \frac{p^2}{4}$, d.h. das Abstandsprodukt ist das Quadrat des halben Abstands von Punkt P zur Geraden g. Diese Kurve besteht aus zwei asymptotischen Zweigen, von denen einer eine Schleife mit Knotenpunkt ist.



Arbeitet man in kartesischen Koordinaten mit dem Ursprung im Punkt P, so hat diese Kurve die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x - p)^2 = \frac{p^4}{16}.$$

Die Nullstellen N_1 und N_2 und der Knoten K ergeben sich zu

$$N_{1,2}(\frac{p(1 \mp \sqrt{2})}{2};0) \quad und \quad K(\frac{p}{2};0) \quad .$$

Die Steigungen im Knoten betragen $\pm\sqrt{2}$. Auf den Tangenten im Knoten liegen auch die Wendepunkte

$$W\left(\frac{7p}{6},\pm\frac{2\sqrt{2}p}{3}\right) \qquad (Steigungen \quad \mp 11\sqrt{2}).$$

Arbeitet man in Polarkoordinaten mit der Gleichung

$$4r\left|p - r\cos\varphi\right| = p^2,$$

so lassen sich Hoch- bzw. Tiefpunkt E als auch die Wendepunkte W wie folgt erfassen:

$$r_E = \frac{3p}{2(\varepsilon+1)} \quad , \quad \sin\frac{\varphi_E}{2} = \pm\frac{\varepsilon-2}{3\sqrt{2}},$$

$$mit \quad \varepsilon = \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\ ;$$

$$r_W = \frac{3p}{2} \quad , \quad \sin\frac{\varphi_W}{2} = \pm\frac{1}{3} \quad .$$

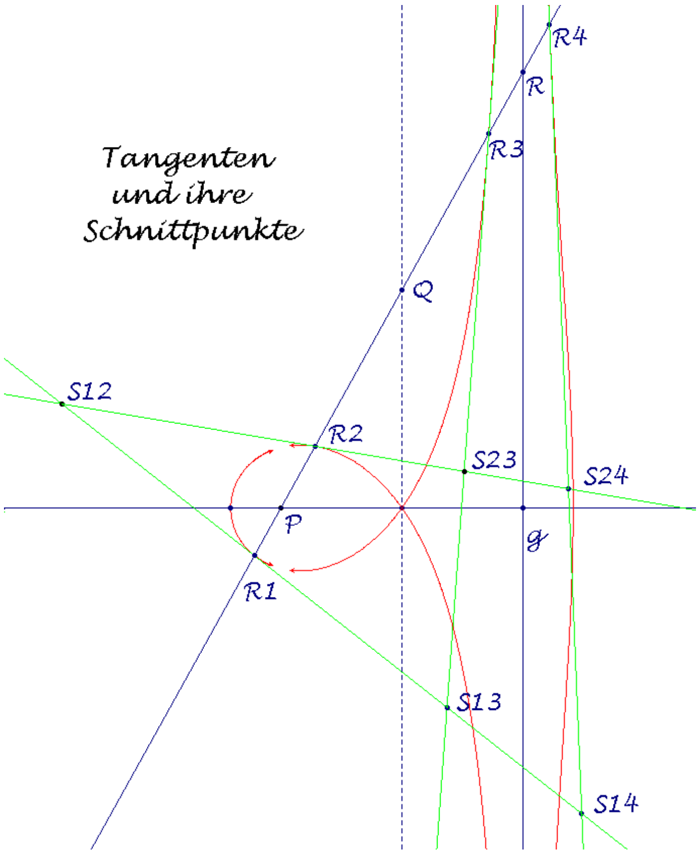
Genauer untersucht seien die Tangenten in den Punkten R_1 bis R_4 einer Trägergeraden PQ; sie haben die Gleichungen:

$$t_1: \quad 4(\cos\varphi + \sqrt{2}\cos^3\frac{\varphi}{2})x + \sqrt{2}(\sin\varphi + \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2})^2 y + 2p = 0\,,$$

$$t_2: \quad -4(\cos\varphi - \sqrt{2}\sin^3\frac{\varphi}{2})x - \sqrt{2}(\sin\varphi + \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2})^2 y + 2p = 0\,,$$

$$t_3: \quad -4(\cos\varphi + \sqrt{2}\sin^3\frac{\varphi}{2})x + \sqrt{2}(\sin\varphi - \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2})^2 y + 2p = 0\,,$$

$$t_4: \quad 4(\cos\varphi - \sqrt{2}\cos^3\frac{\varphi}{2})x - \sqrt{2}(\sin\varphi - \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2})^2 y + 2p = 0\,.$$



Die Tangenten in den bzgl. Q symmetrisch liegenden Punkten R_1 und R_4 bzw. R_2 und R_3 schneiden sich in den Punkten

$$S_{14}\left(\frac{p}{2}(2+\cos\varphi);-p\cos^2\frac{\varphi}{2}\cot\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$S_{23}(\frac{p}{2}(2-\cos\varphi);\, p\sin^2\frac{\varphi}{2}\tan\frac{\varphi}{2})\,.$$

Auf eine explizite Darstellung der weiteren Schnittpunkte wird hier verzichtet, jedoch seien folgende geometrischen Eigenschaften erwähnt: S_{12} und S_{13} liegen symmetrisch zu R_1, S_{12} und S_{24} symmetrisch zu R_2, S_{13} und S_{34} symmetrisch zu R_3 sowie S_{24} und S_{34} symmetrisch zu R_4. Die Schnittpunkte S_{12} und S_{34} bzw. S_{13} und S_{24} liegen auf Parallelen der Trägergeraden im Abstand p.

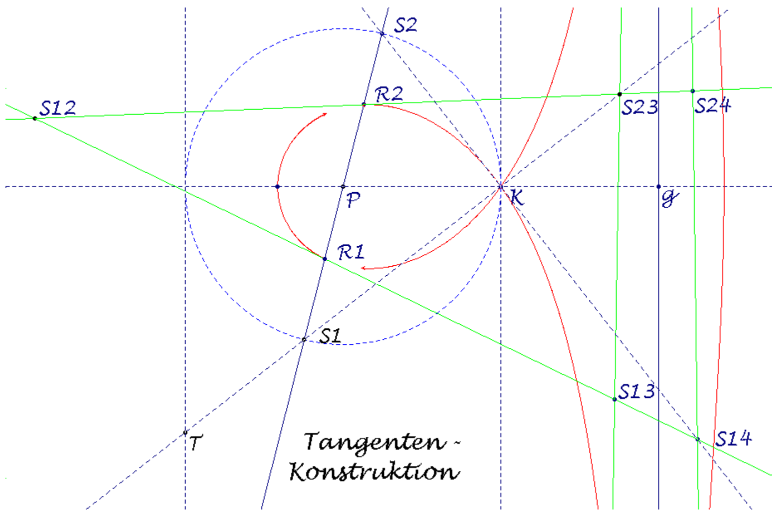
Zur Konstruktion der Tangenten sei von einer Trägergeraden PQ mit den Kurvenpunkten R_1 bis R_4 ausgegangen, die den Hilfskreis um P mit dem Radius $\frac{p}{2}$ in den Punkten

$$S_{1,2}(\mp\frac{p}{2}\cos\varphi;\mp\frac{p}{2}\sin\varphi)$$

schneidet. Verbindet man z.B. S_1 mit dem Knoten K und betrachtet den Schnittpunkt

$$T(-\frac{p}{2};-\frac{p\sin\varphi}{1+\cos\varphi})$$

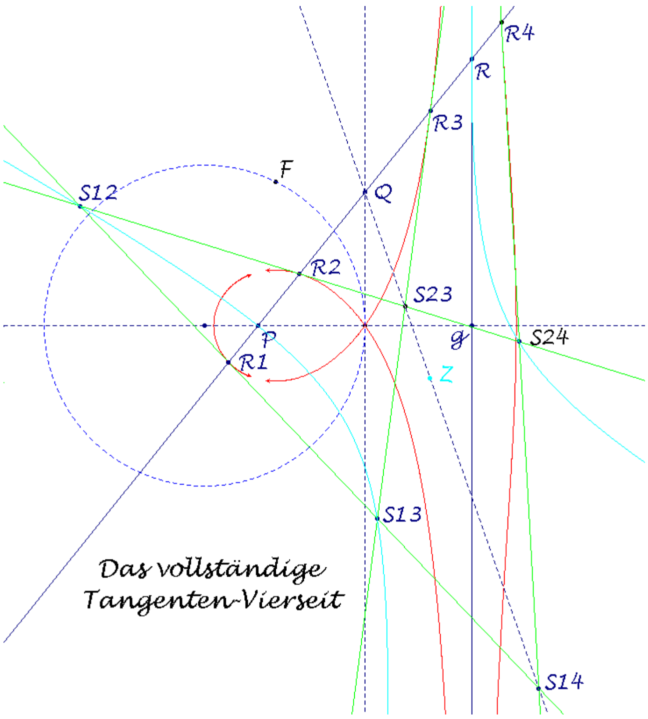
dieser Verbindungsgeraden mit der an P gespiegelten Mittelparallelen, so ergibt die Spiegelung von T an der Mitte der Sehne S_1K den Tangentenschnitt S_{23}. Entsprechend erhält man mit dem Punkt S_2 den Tangentenschnitt S_{14}. Die Verbindungsgeraden R_1S_{14}, R_2S_{23}, R_3S_{23}, R_4S_{14} sind dann die Tangenten in den Punkten R_1 bis R_4.



Die Tangenten in den Punkten R_1 bis R_4 bilden ein vollständiges Vierseit. Die Newton-Gerade des Vierseits, d.h. die Gerade der Diagonalenmitten, ist die Verbindungsgerade der Tangentenschnitte S_{23} und S_{14}, auf der auch der Punkt Q liegt. Der Miquel-Punkt F, d.h. der gemeinsame Punkt der Umkreise der Teildreiseite, hat die Koordinaten

$$F(\frac{p(1+3\cos(2\varphi))}{5+3\cos(2\varphi)};\frac{3p\sin(2\varphi)}{5+3\cos(2\varphi)})\,.$$

Ortslinie der Miquel-Punkte ist ein Kreis um $(-\frac{p}{4};0)$ mit dem Radius $\frac{3p}{4}$. Sind Knoten K, R_2 und der Miquel-Punkt F kollinear, so ist R_2 das Maximum bzw. Minimum E.



Zu der Konstellation der Tangenten in den Punkten R_1 bis R_4 kann eine Hyperbel aufgezeigt werden, die die Tangentenschnitte S_{12}, S_{13}, S_{24}, S_{34} als auch die Punkte P und R der Trägergeraden enthält. Die Gerade g ist Tangente in R, die Trägergerade Normale in P. Das Zentrum

$$Z(\frac{p}{4}(3-\cos(2\varphi));-\frac{p}{4}\sin(2\varphi))$$

ist der vierte harmonische Punkt, mit dem Q die Strecke $S_{14}S_{23}$ harmonisch teilt. Verschiebt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt Z und dreht es um den Winkel

$$\delta \quad mit \quad \tan(2\delta)=\frac{9\sin\varphi+\sin(3\varphi)}{9\cos\varphi+\cos(3\varphi)},$$

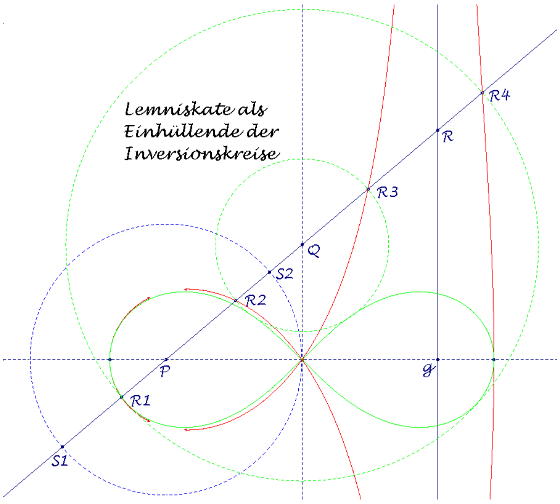
dann erhält diese Hyperbel die Gleichung

$$\frac{\sqrt{9+16\sec^2(\varphi)}+3}{2p^2}u^2-\frac{\sqrt{9+16\sec^2(\varphi)}-3}{2p^2}v^2=1.$$

Polaren von Punkten der Geraden $S_{14}S_{23}$ bzgl. dieser Hyperbel sind parallel zur Trägergeraden PQ; dabei liegt S_{14} auf der Polaren von S_{23} und umgekehrt. Der Mittelpunkt von S_{14} und S_{23}, der auf der Geraden g liegt, ist Pol der Trägergeraden.

Betrachtet man abschließend zu einem Punkt Q der Mittelparallelen die im vorigen Abschnitt angesprochenen

Inversionskreise um Q durch R_1 und R_4 bzw. R_2 und R_3, so sei ohne Herleitung erwähnt, dass diese Kreise eine Lemniskate einhüllen, für die das Abstandsprodukt bzgl. P und dem Spiegelpunkt an der Mittelparallelen den Wert $\frac{p^2}{4}$ hat.



Literatur

[1] H. S. M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie. – 1981 Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart. S. 149.

[2] H. Schmidt:
Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden,1949.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de